

Capítulo 1

MAGNETOSTÁTICA DEL VACÍO

1.1 Introducción:

Dentro del estudio de la interacción electromagnética aquí se tratará la llamada “interacción magnetostática”. Toda interacción puede estudiarse inicialmente en base al concepto de fuerza. La fuerza electromagnética sobre una partícula con carga “q” (carga puntual) es:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{1.1}$$

llamada fuerza de Coulomb-Lorentz, donde: \mathbf{E} es el vector intensidad de campo eléctrico y \mathbf{B} es el vector inducción de campo magnético.

El concepto de campo permite asociar a cada punto del espacio un vector \mathbf{B} ; en condiciones estacionarias el vector sólo depende de \mathbf{r} .

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} = \mathbf{B}_{(x,y,z)}$$

Además \mathbf{E} y \mathbf{B} son independientes el uno del otro. Las unidades de B son el Tesla o Weber/m² (Wb/m²)
 1T = 10⁴ G (G : Gauss)

1.2 Fuerza magnética sobre una corriente:

Por la ec. (1.1) sólo las cargas móviles experimentan fuerza; un conjunto de cargas en movimiento es una corriente eléctrica. En los capítulos 1,2 y 3 trataremos los efectos magnéticos de las corrientes estacionarias.

Examinemos la forma diferencial de la ec. 1.1 para \mathbf{B}

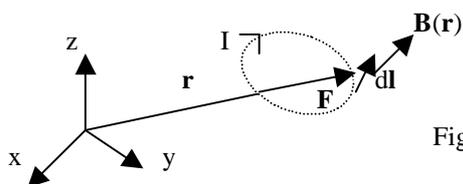


Fig. 1.2

$$d\mathbf{F} = dq \mathbf{v} \times \mathbf{B} = dq \frac{d\mathbf{l}}{dt} \times \mathbf{B} = \frac{dq}{dt} d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV$$

$$\mathbf{F} = I \oint_{\Gamma} d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \tag{1.2a}$$

Si \mathbf{B} es uniforme o el circuito es muy pequeño, luego no existe efecto traslacional:

Evaluando el momento de fuerza relativo al origen:

$$d\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = I \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

$$\boldsymbol{\tau} = I \oint_{\Gamma} \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \tag{1.2b}$$

En general, existe efecto rotacional.

Una pequeña bobina (Flip-coil) puede usarse para detectar la existencia de un campo magnético

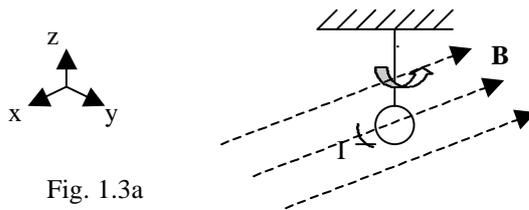


Fig. 1.3a

Por la analogía con la electrostática conviene caracterizar al circuito de la fig 1.2 por un momento dipolar magnético (\mathbf{m}):

$$\boldsymbol{\tau}_{elect} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\tau}_{mag} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \tag{1.3}$$

Para el caso de una espira con corriente I , que encierra el área S : $\mathbf{m} = I\mathbf{S}$, para N espiras: $\mathbf{m} = NIS$

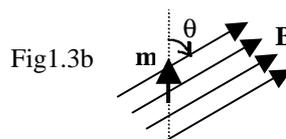


Fig.1.3b

El dipolo gira hasta quedar paralelo a \mathbf{B} ($\theta = 0$), entonces $\boldsymbol{\tau} = 0$

1.3 Vector de Inducción (B):

1.3.1 Ley de Ampere:

Ampere estableció experimentalmente que el campo magnético es debido a las corrientes eléctricas.

$$\text{Se sabe: } \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial t} = 0$$

En condiciones estacionarias: $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$

En base a esta condición, Ampere estableció que el rotacional de \mathbf{B} es: $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ (1.4)

Carácter rotacional (campo vórtice)

Forma integral:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I \tag{1.4b}$$

Donde: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$

permeabilidad magnética del vacío

para especificar completamente el campo \mathbf{B} debe conocerse la divergencia de \mathbf{B} :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1.5a}$$

carácter solenoidal $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ (1.5b)

la ec. (1.5) es cierta aun en condiciones dinámicas; las ec. (1.4)a y (1.5)a son las ecuaciones diferenciales fundamentales para el campo magnético estacionario.

Ejemplo 1.1: Filamento infinito de corriente:

Por conocimientos previos de física asumiremos la forma de las líneas de fuerza (ver ejemplo 1.5). Así puede usarse la ec. (1.4)b

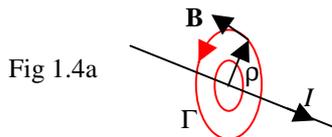


Fig 1.4a

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B \quad \text{y} \quad m_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = m_0 I$$

Luego: $B = \frac{m_0 I}{2\pi r}$ ó $\mathbf{B} = \frac{m_0 I}{2\pi r} \mathbf{a}_{\phi} = \frac{m_0 I}{2\pi r} \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_{\hat{r}}$

Ejemplo 1.2: Solenoide ideal infinito:
Se asume que sólo existe campo dentro de aquél y dicho campo es uniforme y paralelo al eje.

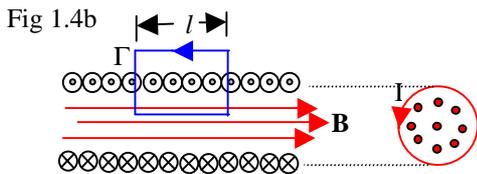


Fig 1.4b

n espiras por unidad de longitud

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = Bl \quad \text{y} \quad m_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = m_0 n l$$

Luego: $B = m_0 n l$

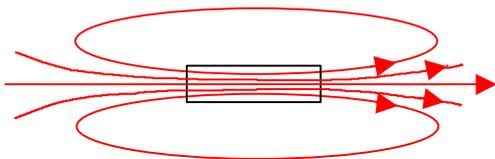


Fig. 1.4c Un solenoide real

1.3.2 Ley de Biot – Savart:

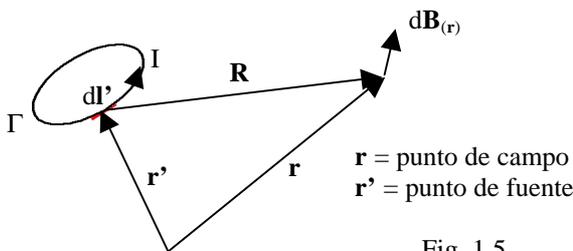


Fig. 1.5

$$d\mathbf{B}_{(r)} = \frac{m_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (1.6)a$$

Nótese la similitud con la ley de Coulomb:

$$d\mathbf{E}_{(r)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq \frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

B es un vector axial y E es un vector polar

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{m_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (1.6)a$$

La ec. (1.6) corresponde a la densidad de corriente unifilar. Es usual emplear:

$$I d\mathbf{l}' = I \mathbf{a}_T d\mathbf{l}' \quad \text{y} \quad \mathbf{R} = R \mathbf{a}_R$$

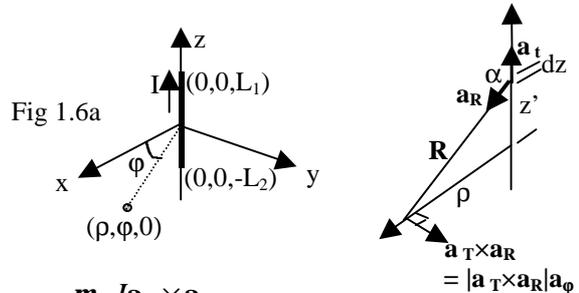
Para una distribución superficial: (\mathbf{J}_S)

$$\mathbf{B} = \int_S d\mathbf{B} = \int_V \frac{m_0 \mathbf{J}_S \mathbf{a}_T \times \mathbf{a}_R dS'}{4\pi R^2} \quad (1.7)$$

Para una distribución volumétrica: (\mathbf{J})

$$\mathbf{B} = \int_V d\mathbf{B} = \int_V \frac{m_0 \mathbf{J} \mathbf{a}_T \times \mathbf{a}_R dV'}{4\pi R^2} \quad (1.8)$$

Ejemplo 1.3: Hallar B en puntos del plano $z = 0$ para un filamento de corriente I finito



$$d\mathbf{B} = \frac{m_0}{4\pi} \frac{I \mathbf{a}_T \times \mathbf{a}_R}{R^2} dz'$$

$$d\mathbf{B} = \frac{m_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha \mathbf{a}_{\phi} dz'}{(r^2 + z'^2)} = \frac{m_0}{4\pi} \frac{I r dz' \mathbf{a}_{\phi}}{(r^2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$\mathbf{B} = \frac{m_0 I r \mathbf{a}_{\phi}}{4\pi} \int_{z'=-L_2}^{L_1} \frac{dz'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}}$$

recordando que:

$$z' = r \tan q, \quad dz' = r \sec^2 q dq, \quad \tan q = z'/r$$

$$\mathbf{B} = \frac{m_0 I}{4\pi r} \mathbf{a}_{\phi} \left[\frac{z'}{\sqrt{z'^2 + r^2}} \right]_{z'=-L_2}^{L_1} =$$

$$\mathbf{B} = \frac{m_0 I}{4\pi r} \mathbf{a}_{\phi} \left[\frac{L_1}{\sqrt{L_1^2 + r^2}} + \frac{L_2}{\sqrt{L_2^2 + r^2}} \right]$$

Ejemplo 1.4: Un gran número de vueltas (N) muy próximas de un alambre muy fino se enrollan en una sola capa sobre una esfera de madera de radio a, con los planos de las vueltas ortogonales al eje diametral de la esfera, cubriendo toda la superficie de ésta. Si la corriente en el alambre es I, hallar la inducción en el centro de la esfera.

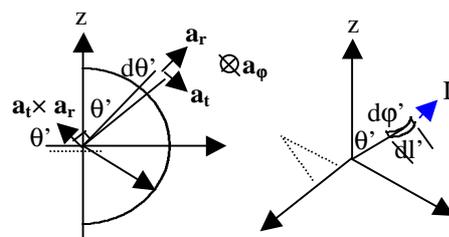


Fig 1.7a

Nótese que:

$$\mathbf{a}_T = \mathbf{a}_\phi, \quad \mathbf{a}_R = -\mathbf{a}_r, \quad \mathbf{a}_T \times \mathbf{a}_R = -\mathbf{a}_\theta$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 dI \mathbf{a}_\phi \times (-\mathbf{a}_r) dl'}{4pa^2} \quad dl' = a \sin q' dj' p$$

or simetría, B resultante será paralela al eje z; sólo requerimos:

$$dB_z = |d\mathbf{B}| \sin q' a_z = \frac{\mu_0 dI \sin^2 f' df' a_z}{4pa}$$

también: $dI = \frac{NI}{ap} adq' = \frac{NI dq'}{p}$

$$dB_z = \frac{\mu_0 NI \sin^2 q' dq' dj'}{4p^2 a}$$

$$\mathbf{B} = \int_{q'=0}^p \int_{j'=0}^{2p} dB_z = \frac{\mu_0 NI}{4pa} \mathbf{a}_z \left[q' - \frac{\sin 2q'}{2} \right]_{q'=0}^p$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 NI}{4a} \mathbf{a}_z$$

Observación: El sistema dado equivale a una corriente superficial, con densidad:

$$J_s = \frac{NI}{ap} = \text{cte}$$

luego de la ec. (1.7):

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4pa^2} J_s \mathbf{a}_\phi \times (-\mathbf{a}_r) dS'$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J_s \mathbf{a}_\phi \times (-\mathbf{a}_r) a^2 \sin q' dq' dj'}{4pa^2}$$

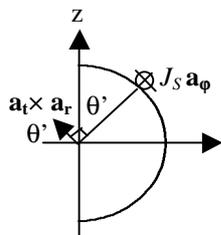


Fig 1.7d

$$dB_z = \frac{\mu_0 J_s \sin^2 q' dq' dj'}{4p} a_z$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J_s p}{4} \mathbf{a}_z$$

1.4 Potencial vectorial A:

En teoría de campos la solución analítica de las ec. (1.4)a y (1.5)a se obtiene en términos de la función potencial.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.9)a$$

El potencial no está unívocamente determinado:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}' - \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{A}' - \mathbf{A})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) = 0 \quad \nabla \times (\nabla \Psi) = 0$$

$$\therefore \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Psi$$

lo que se resuelve especificando la divergencia de A.

$$\text{En estado estacionario: } \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (1.9)b$$

Además se debe especificar el comportamiento de A en contornos de la región (ver capítulo 3)

1.4.1 Ec. Diferencial para A:

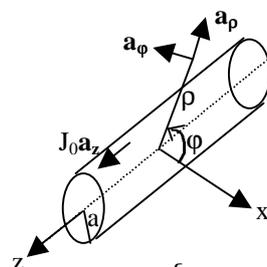
Reemplazando ec (1.9)a en (1.4)a:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\text{Por ec. (1.9)b: } \nabla^2 \mathbf{A}_{(r)} = -\mu_0 \mathbf{J}_{(r)} \quad (1.10)$$

Ejemplo 1.5: Hallar B para un conductor cilíndrico muy largo de radio a con densidad de corriente uniforme J_0 .



$$\nabla^2 \mathbf{A} = \begin{cases} -\mu_0 J_0 \mathbf{a}_z & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

Por simetría: $\mathbf{A} = A_{(r)} \mathbf{a}_z$

$$\text{Entonces: } \nabla^2 A = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA}{dr} \right)$$

$$\text{a) Para } r < a: \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA}{dr} \right) = -\mu_0 J_0$$

$$A = -\frac{\mu_0 J_0 r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2$$

$$\text{b) Para } r > a: \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA}{dr} \right) = 0$$

$$A = C_3 \ln r + C_4$$

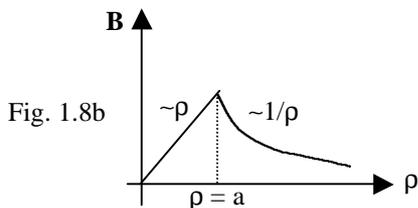
$$\text{Hallamos: } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\mathbf{a}_\phi \frac{dA}{dr}$$

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \left(\frac{\mu_0 J_0 r}{2} - \frac{C_1}{r} \right) \mathbf{a}_\phi & r < a \\ -\frac{C_3}{r} \mathbf{a}_\phi & r > a \end{cases}$$

Criterio: $C_1 = 0$ para que B esté definido en $r = 0$

Por continuidad (capítulo 3):

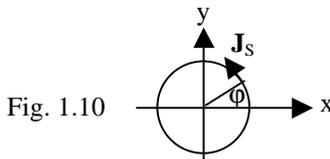
$$\frac{m_0 J_0 r}{2} \Big|_{r=a} = -\frac{C_3}{r} \Big|_{r=a} \rightarrow C_3 = -\frac{m_0 J_0 a^2}{2}$$



$$\Phi_m = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\Phi_m = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \tag{1.13}$$

Ejemplo 1.6: Calcular \mathbf{A} debido a un solenoide infinito con n espiras por unidad de longitud y corriente I .



1.4.2 \mathbf{A} en función de la corriente:

Se trata de resolver la ec. (1.10) en función de la corriente; vemos el caso en coordenadas cartesianas:

$$\nabla^2 A_x = -m_0 J_x$$

$$\nabla^2 A_y = -m_0 J_y$$

$$\nabla^2 A_z = -m_0 J_z$$

conocemos: $\nabla^2 \mathbf{f} = -\frac{\mathbf{r}_f}{\epsilon_0}$; luego, por analogía:

$$\mathbf{f}_{(r)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r}_{f(r')}}{R} dV'$$

$$\mathbf{A}_{(r)} = \frac{m_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_{(r')}}{R} dV' \tag{1.11a}$$

Para otras distribuciones de corriente:

$$\mathbf{A}_{(r)} = \frac{m_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{J}_{S(r')}}{R} dS' \tag{1.11b}$$

$$\mathbf{A}_{(r)} = \frac{m_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I d\mathbf{l}}{R} \tag{1.11c}$$

El ejemplo 1.5 es análogo a un cilindro con densidad de carga $\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_0$.

1.4.3 Flujo de \mathbf{B} y circulación de \mathbf{A} :

Se define: $\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ (1.12)

Unidad: Weber (Wb) ó (Tesla \times m²)
1Wb = 10⁸ Mx (Mx: Maxwell)

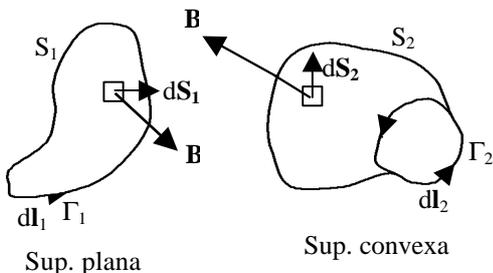


Fig. 1.9

De la ec. (1.9)a:

El solenoide es equivalente a una corriente superficial:

$$\mathbf{J}_S = J_S \mathbf{a}_\phi, \quad J_S = nI$$

$$\mathbf{J}_S = -J_S \text{sen } \mathbf{j} \mathbf{a}_x + J_S \text{cos } \mathbf{j} \mathbf{a}_y$$

La solución es análoga a un cilindro de radio a con carga electrostática.

$$\mathbf{s}_f = \mathbf{s}_0 \text{sen } \mathbf{j} (A_x) \quad \mathbf{s}_f = \mathbf{s}_0 \text{cos } \mathbf{j} (A_y)$$

La ec. (1.13) permite una solución más simple.

Por simetría: $\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r A$

Para $\rho < a$:

$$2\pi r A = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \pi r^2 m_0 n I \quad (\text{ejemplo 1.2})$$

$$\rightarrow A = \frac{r m_0 n I}{2} \rightarrow \mathbf{A} = \frac{r m_0 n I}{2} \mathbf{a}_\phi$$

Para $\rho > a$:

$$2\pi r A = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \pi a^2 m_0 n I$$

$$\rightarrow A = \frac{a^2 m_0 n I}{2r} \rightarrow \mathbf{A} = \frac{m_0 a^2 n I}{2r} \mathbf{a}_\phi$$

$\mathbf{A} \neq 0$ en todo el espacio, aunque $\mathbf{B} = 0$ en el exterior puede comprobarse tomando $\nabla \times \mathbf{A}$

1.5 Potencial Escalar Magnético:

Cuando $\mathbf{J} = 0$, la ec. (1.4)a es $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ y por analogía con la electrostática puede definirse un potencial escalar:

$$\mathbf{B} = -m_0 \nabla V_m \tag{1.14a}$$

Como $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ec. (1.5), siempre se cumple que:

$$\nabla^2 V_m = 0 \tag{1.14b} \text{ Ec. de LaPlace}$$

1.6 Momento dipolar magnético:

1.6.1 Campo \mathbf{B} de un circuito pequeño:

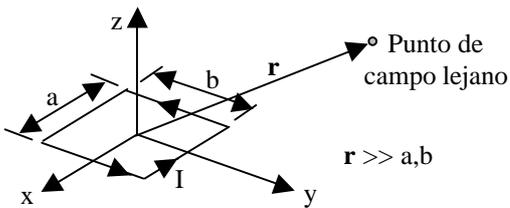


Fig. 1.11a

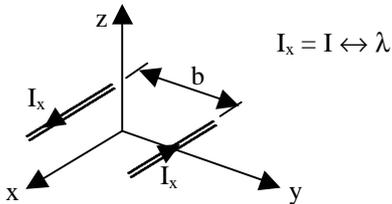


Fig. 1.11b

De acuerdo con la sub-sección 1.4.2 la solución para A_x puede obtenerse por analogía electrostática (fig. 1.11b)

Sabemos que: $\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$ $\mathbf{p} = Iab(-\mathbf{a}_y)$

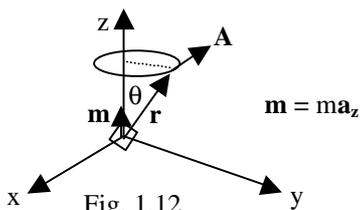


Fig. 1.12

$\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$

Luego: $\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{py}{r^3} \right) = -\frac{Iaby}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

$A_x = -\frac{Iabm_0 y}{4\pi r^3}$ (ver ec. (1.11)a)

también: $A_y = \frac{Iabm_0 x}{4\pi r^3}$

podemos expresar el resultado: $\mathbf{A} = m_0 \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}$ (1.15)

$\mathbf{m} = Iaba_z$

usando la ec. (1.9)a:

$\mathbf{B} = \frac{m_0}{4\pi} \left[-\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \right]$ (1.16a)

obsérvese que en puntos de campo lejano: $\nabla \times \mathbf{B} = 0$; luego puede despejarse V_m :

$V_m = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3}$ (1.17)

En coordenadas esféricas la ec. (1.17): $V_m = \frac{m \cos \theta}{4\pi r^2}$

De la ec. (1.14)a:

$\mathbf{B} = -m_0 \left[\frac{\partial V_m}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V_m}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta \right]$

$\mathbf{B} = \frac{m_0 m}{4\pi r^3} [2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta]$ (1.16b)

también: $\mathbf{A} = \frac{m_0 m \sin \theta}{4\pi r^2} \mathbf{a}_\phi$

1.6.2 Expresiones para evaluar m:

corriente unifilar: $\mathbf{m} = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} I \mathbf{r}' \times d\mathbf{l}'$ (1.18)a

superficial: $\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_S \mathbf{r}' \times \mathbf{J}_S dS'$ (1.18)b

volumétrica: $\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{J} dV'$ (1.18)c

Para todos los efectos magnéticos una distribución de carga electrostática en movimiento equivale a una corriente:

$\mathbf{J}_S = \mathbf{s}_f \mathbf{v}$ (1.19a)

$\mathbf{J} = \mathbf{r}_f \mathbf{v}$ (1.19b)

Ejemplo 1.7

Una esfera conductora de radio "a" está cargada a un potencial ϕ_0 ; si gira en torno a su eje diametral con velocidad angular ω_0 cte. Hallar:

- a) Densidad de corriente superficial
- b) Momento dipolar

Sabemos: $\mathbf{f}_0 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 a^2} \mathbf{a}_r \rightarrow Q_0 = 4\pi\epsilon_0 a^2 \phi_0$

Para distribución uniforme $\mathbf{s}_f = \frac{Q_0}{4\pi a^2} \mathbf{a}_r = \frac{\epsilon_0 \phi_0}{a} \mathbf{a}_r$

Por ec. (1.19)a:

$\mathbf{J}_S = \mathbf{s}_f v = \mathbf{s}_f \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \mathbf{s}_f \omega_0 a \mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_r =$

$\mathbf{J}_S = \mathbf{s}_f \omega_0 a \sin \theta' \mathbf{a}_\phi$

Por ec. (1.18)b:

$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} (a \mathbf{a}_r) \times$

$\times (\epsilon_0 \phi_0 \omega_0 \sin \theta' \mathbf{a}_\phi) a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$

$\mathbf{m} = \frac{a^3 \epsilon_0 \phi_0 \omega_0}{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} (-\mathbf{a}_\theta) \sin^2 \theta' d\theta' d\phi'$

$\mathbf{m} = a^3 \pi \epsilon_0 \phi_0 \omega_0 \int_{\theta=0}^{\pi} (-\mathbf{a}_\theta) \sin^2 \theta' d\theta'$

se nota que \mathbf{m} resultante es paralela a \mathbf{a}_z

$\mathbf{m} = a^3 \pi \epsilon_0 \phi_0 \omega_0 \mathbf{a}_z \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta' d\theta'$

obteniéndose:

$$\mathbf{m} = \left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) \left(\frac{\mathbf{e}_0 \mathbf{f}_0}{a}\right) (a)(\omega_0 \mathbf{a}_z)$$

$$\mathbf{m} = [(\text{volumen})(\mathbf{s}_f)(\text{radio})] \omega_0$$

1.7 Casos especiales:

1.7.1 Bobina de Helmholtz

Sistema formado por 2 bobinas compactas de N vueltas

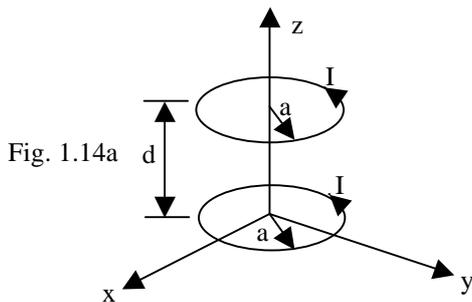


Fig. 1.14a

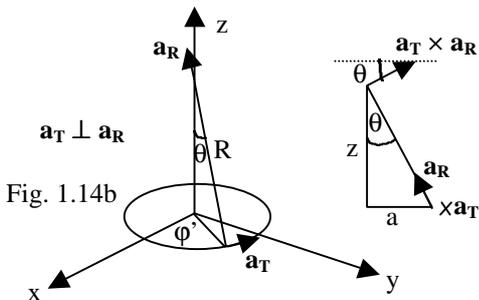


Fig. 1.14b

Para la fig. 1.14b:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 N I \mathbf{a}_T \times \mathbf{a}_R dl'}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 N I \mathbf{a}_T \times \mathbf{a}_R dj'}{4\pi (a^2 + z^2)}$$

por simetría el **B** sólo depende de dB_z :

$$dB_z = \frac{\mu_0 N I |\mathbf{a}_T \times \mathbf{a}_R| a \sin \theta dj'}{4\pi (a^2 + z^2)} \mathbf{a}_z$$

$$dB_z = \frac{\mu_0 N I a^2 dj'}{4\pi (a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 N I a^2}{4\pi (a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z \int_{j'=0}^{2\pi} dj' = \frac{\mu_0 N I a^2 \mathbf{a}_z}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\mathbf{B} = B_{(z)} \mathbf{a}_z \text{ campo en el eje } z$$

Por el teorema de Taylor:

$$B_{(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{(z_0)}^k}{k!} (z - z_0)^k =$$

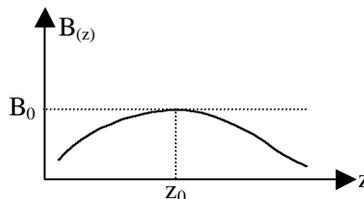
$$= B_{(z_0)} + B_{(z_0)}' (z - z_0) + \frac{B_{(z_0)}''}{2!} (z - z_0)^2 + \dots$$

$$\frac{dB_{(z)}}{dz} = \frac{3\mu_0 N I a^2}{2} \left[-\frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{(z-d)}{[a^2 + (z-d)^2]^{5/2}} \right]$$

Eligiendo $z_0 = d/2$ resulta: $B_{(z_0)}' = 0$

Si además $d = a$ puede probarse que $B_{(z_0)}'' = 0$, resultando:

$$B_{(z)} = B_{(z_0)} + \dots = \frac{8\mu_0 N I}{5^{3/2} a} + \dots$$



Campo en el eje aproximadamente constante alrededor de z_0 .

1.7.2

Hallar **B** en todo el espacio debido a un cascarón esférico esférico con densidad de carga σ_f , girando en torno al eje z (diametral) con velocidad ω constante.

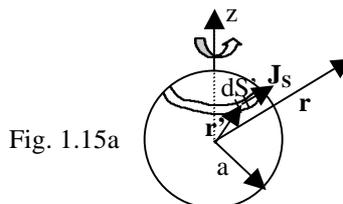


Fig. 1.15a

Sabemos: $\mathbf{J}_s = \mathbf{s}_f \mathbf{v} = \mathbf{s}_f \omega \times \mathbf{r}'$

Por ec. (1.11)b

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{s}_f \omega}{4\pi} \times \oint_S \frac{\mathbf{r}' dS'}{R} \quad R = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$$

siendo: $\mathbf{r}' = a \mathbf{a}_r$ y $dS' \mathbf{a}_r = dS'$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{s}_f \omega}{4\pi} \times \oint_S \frac{dS'}{R} \quad (i)$$

conocemos:

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \Psi = \int_V \nabla \cdot \Psi dV \quad \bullet \text{ puede ser también } \times$$

$$\text{luego: } \oint_S \frac{d\mathbf{S}'}{R} = \int_V \nabla' \cdot \left(\frac{1}{R} \right) dV' = \int_V \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV'$$

la integral puede calcularse por la ley de Gauss como en electrostática; es el caso de una distribución esférica con densidad ρ_f .

a) Para $r > a$:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}_f}{4\pi \epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV' = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \rho_f \right) \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\therefore \int_V \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV' = \frac{4}{3} p a^3 \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

En (i) $\mathbf{A} = \frac{m_0 \mathbf{s}_f a \omega}{4p} \times \left(\frac{4}{3} p a^3 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{m_0 \mathbf{m} \times \mathbf{r}}{4p r^3}$

Campo dipolar, ec (1.16)a y: $\mathbf{m} = \mathbf{s}_f a \left(\frac{4}{3} p a^3 \right) \omega$

b) Para $r < a$:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}_f}{4p \epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV' = \frac{1}{4p \epsilon_0} \left(\frac{4}{3} p r^3 \mathbf{r}_f \right) \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\therefore \int_V \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV' = \frac{4}{3} p \mathbf{r}$$

En (i): $\mathbf{A} = \frac{m_0 \mathbf{s}_f a \omega \times \mathbf{r}}{3}$, $\omega \times \mathbf{r} = \omega r \text{sen } \theta \mathbf{a}_\phi$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{m_0 \mathbf{s}_f a}{3} \nabla \times (\omega r \text{sen } \theta \mathbf{a}_\phi)$$

$$\mathbf{B} = \frac{2m_0 \mathbf{s}_f a \omega}{3} (\cos \theta \mathbf{a}_r - \text{sen } \theta \mathbf{a}_\theta)$$

$$\mathbf{B} = \frac{2m_0 \mathbf{s}_f a \omega}{3} \mathbf{a}_z = \frac{2}{3} m_0 \mathbf{s}_f a \omega$$

campo uniforme.

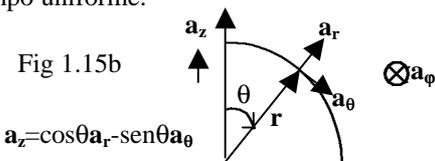


Fig 1.15b

$$\mathbf{a}_z = \cos \theta \mathbf{a}_r - \text{sen } \theta \mathbf{a}_\theta$$

1.7.3

Hallar B en puntos fuera del eje de simetría para el caso de una espira circular

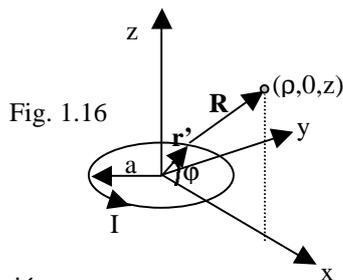


Fig. 1.16

Solución:

Según la ec. (1.11)c

$$\mathbf{A}_{(r)} = \frac{m_0 I}{4p} \int_{j'=0}^{2p} \frac{\mathbf{a}_\phi a dj'}{R}$$

$$\mathbf{a}_\phi = -\text{sen } j' \mathbf{a}_x + \cos j' \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{A}_{(r)} = -\frac{m_0 I a_x}{4p} \int_{j'=0}^{2p} \frac{a \text{sen } j' dj'}{R} + \frac{m_0 I a_y}{4p} \int_{j'=0}^{2p} \frac{a \cos j' dj'}{R}$$

$$\mathbf{A}_{(r)} = 0 + \frac{m_0 I a_y}{2p} \int_{j'=0}^p \frac{a \cos j' dj'}{R}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = r \mathbf{a}_x + z \mathbf{a}_z - (a \cos j' \mathbf{a}_x + a \text{sen } j' \mathbf{a}_y) = (r - a \cos j') \mathbf{a}_x - a \text{sen } j' \mathbf{a}_y + z \mathbf{a}_z$$

$$R = [(r - a \cos j')^2 + a^2 \text{sen}^2 j' + z^2]^{1/2}$$

$$= [r^2 + a^2 + z^2 - 2ra \cos j']^{1/2}$$

Generalizando:

$$A_j = \frac{m_0 I}{2p} \int_{j'=0}^p \frac{a \cos j' dj'}{[r^2 + a^2 + z^2 - 2ra \cos j']^{1/2}}$$

Integrales Elípticas completas de 1ª clase (K) y 2ª clase (E)

$$K = \int_0^{p/2} \frac{dx}{(1 - k^2 \text{sen}^2 x)^{1/2}}$$

$$E = \int_0^{p/2} (1 - k^2 \text{sen}^2 x)^{1/2} dx$$

Para evaluar el rot:

$$\frac{\partial K}{\partial k} = \frac{E}{k(1 - k^2)} - \frac{K}{k} \quad \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{E}{k} - \frac{K}{k}$$

Cambio de variable:

$$j' = p - 2a \rightarrow dj' = -2da$$

$$\cos j' = 2 \text{sen}^2 a - 1 \quad \begin{cases} j' = 0 \rightarrow a = p/2 \\ j' = p \rightarrow a = 0 \end{cases}$$

Resulta:

$$A_j = \frac{m_0 I a}{p} \int_0^{p/2} \frac{(2 \text{sen}^2 a - 1) da}{[(a + r)^2 + z^2 - 4ar \text{sen}^2 a]^{1/2}}$$

Definiendo: $k^2 = \frac{4ar}{[(a + r)^2 + z^2]}$

Nótese que puede hallarse: $\frac{\partial k}{\partial r}$ y $\frac{\partial k}{\partial z}$

Se llega:

$$A_j = \frac{m_0 I a}{p [(a + r)^2 + z^2]^{1/2}} \int_0^{p/2} \frac{(2 \text{sen}^2 a - 1) da}{(1 - k^2 \text{sen}^2 a)^{1/2}}$$

Puede demostrarse que:

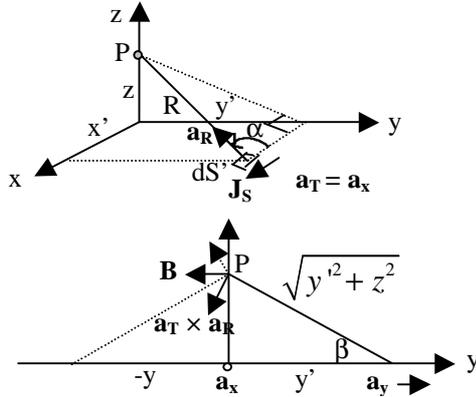
$$A_j = \frac{m_0 I}{pk} \left(\frac{a}{r} \right)^{1/2} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K - E \right]$$

Finalmente:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\mathbf{a}_p \frac{\partial A_j}{\partial z} + \mathbf{a}_z \frac{1}{r} \left[r \frac{\partial A_j}{\partial r} + A_j \right]$$

1.7.4

Calcular B para un plano infinito con corriente superficial uniforme usando Biot - Savart



Por la fórmula (1.7):

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J_s \mathbf{a}_T \times \mathbf{a}_R}{R^2} dS'$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J_s \sin \alpha \sin \beta (-\mathbf{a}_y) dx' dy'}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}}$$

De las figuras:

$$d\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 J_s a_y}{4\pi} \frac{z dx' dy'}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 z J_s a_y}{4\pi} \int_{y'=-\infty}^{+\infty} \int_{x'=-\infty}^{+\infty} \frac{dx' dy'}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}}$$

Cálculo de la integral:

$$\int_{x'=-\infty}^{+\infty} \frac{dx'}{(x'^2 + A^2)} \quad A^2 = z^2 + y'^2$$

cambio de variable:

$$x' = a \tan a \quad dx' = A \sec^2 a da$$

$$\int_{a=-p/2}^{+p/2} \frac{A \sec^2 a da}{(A^2 \tan^2 a + A^2)^{3/2}} = \int_{a=-p/2}^{+p/2} \frac{\cos a}{A^2} da = \frac{2}{A^2}$$

Luego queda: $\int_{y'=-\infty}^{+\infty} \frac{2 dy'}{(y'^2 + z^2)}$

cambio de variable: $y = z \tan a, \quad dy = z \sec^2 a da$

Reemplazando:

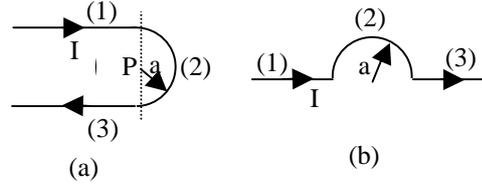
$$\int_{a=-p/2}^{+p/2} \frac{2z \sec^2 a da}{(z^2 \tan^2 a + z^2)^{3/2}} = \int_{a=-p/2}^{+p/2} \frac{2 da}{z} = \frac{2p}{z}$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 J_s}{2} \mathbf{a}_y, \quad z > 0$$

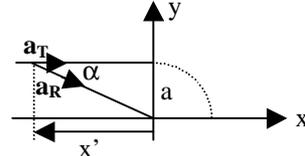
Así:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J_s}{2} \mathbf{a}_y, \quad z < 0$$

Hallar B en el punto P (Centro del círculo de radio a) para los alambres infinitos con corriente I:



Solución: Para (a): Tramo recto (1)



$$d\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I \mathbf{a}_T \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} dl'$$

$$d\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I \sin \alpha (-\mathbf{a}_z)}{4\pi R^2} dx'$$

$$d\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I a (-\mathbf{a}_z) dx'}{4\pi R^3} = -\frac{\mu_0 I a a_z dx'}{4\pi (x'^2 + a^2)^{3/2}}$$

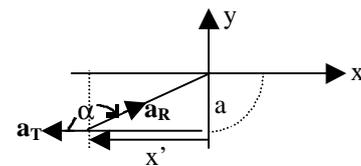
$$\mathbf{B}_1 = -\frac{\mu_0 I a a_z}{4\pi} \int_{x'=-\infty}^0 \frac{dx'}{(x'^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{\mu_0 I a a_z}{4\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\frac{x'}{a^2 (x'^2 + a^2)^{1/2}} \right]_{-M}^0$$

$$= -\frac{\mu_0 I a a_z}{4\pi a^2} \left[0 - \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{-M}{\sqrt{M^2 + a^2}} \right) \right]$$

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{\mu_0 I a_z}{4\pi a} (1) = -\frac{\mu_0 I a_z}{4\pi a}$$

Tramo recto (3)



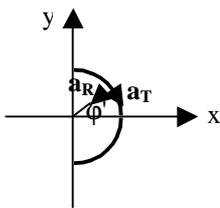
$$d\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_0 I \mathbf{a}_T \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} dl'$$

$$d\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_0 I \sin \alpha (-\mathbf{a}_z)}{4\pi R^2} dx'$$

$$d\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_0 I a (-\mathbf{a}_z) dx'}{4\pi R^3} = -\frac{\mu_0 I a a_z dx'}{4\pi (x'^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\mathbf{B}_3 = -\frac{\mu_0 I a a_z}{4\pi} \int_{x'=-\infty}^0 \frac{dx'}{(x'^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 I a_z}{4\pi a}$$

Tramo semicircular (2):



$$d\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I \mathbf{a}_T \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} dl' = \frac{\mu_0 I (-\mathbf{a}_z) a dj'}{4\pi a^2}$$

$$d\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0 I a_z dj'}{4\pi a^2}$$

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0 I a_z}{4\pi a^2} \int_{j'=-p/2}^{p/2} dj' = -\frac{\mu_0 I a_z}{4a}$$

$$\mathbf{B}_p = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} [2 + p] \mathbf{a}_z$$

Para (b):

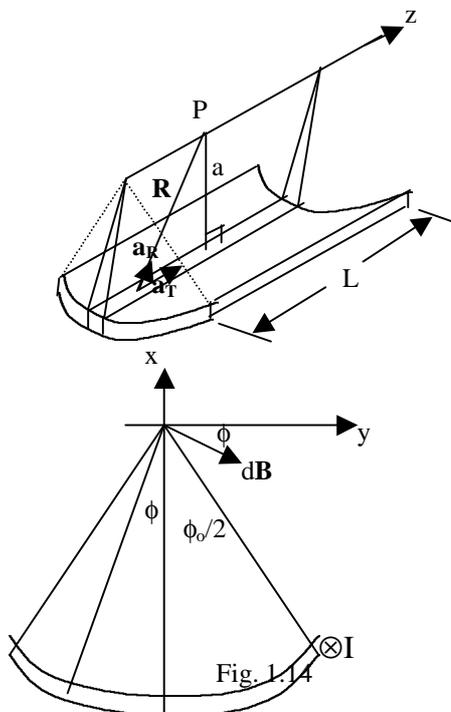
En el tramo (1): $\mathbf{a} = 0 \rightarrow \sin \mathbf{a} = 0$

En el tramo (3): $\mathbf{a} = p \rightarrow \sin \mathbf{a} = 0$

Del tramo (2): $\mathbf{B}_p = -\frac{\mu_0 I}{4a} \mathbf{a}_z$

Se tiene una cáscara cilíndrica de espesor despreciable y longitud L, recorrida por una corriente I. Calcular \mathbf{B} en un punto P del eje del cilindro imaginario al cual pertenece la cáscara. El radio del cilindro es "a" y la cáscara subtende un ángulo ϕ_0 .

Solución:



De (1.10)a

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J_s \mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_T}{4\pi R^2} dS \quad J_s = \frac{I}{af_0}$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J_s a df dz \mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_T}{4\pi [a^2 + (z_0 - z)^2]} \quad |\mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_T| = \text{Sen } \mathbf{a} = \frac{a}{r}$$

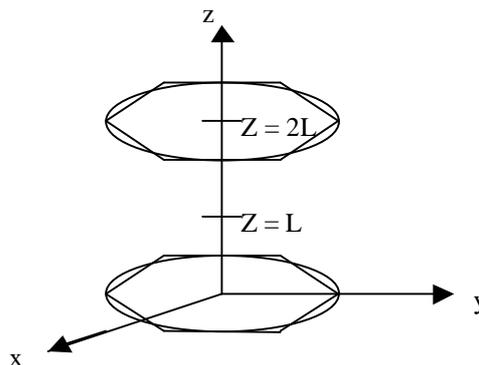
Por consideraciones de simetría, el campo \mathbf{B} está en la dirección y, se calcula integrando la componente de $d\mathbf{B}$ a lo largo del eje y: $|d\mathbf{B}| \text{Cos } \mathbf{f}$

$$\therefore \frac{\mu_0 J_s}{2\pi} \mathbf{a}_y \int_0^{f_0/2} \int_0^L \frac{a^2 \text{cos } \mathbf{q}}{[a^2 + (z_0 - z)^2]^{3/2}} dz df$$

¿Sí $\phi = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = ??$, ¿Cómo se interpreta físicamente?

Problema: Se tienen dos espiras poligonales de n lados inscritas en una circunferencia de radio R y N vueltas, las espiras se encuentran en planos que son perpendiculares al eje z y a una distancia 2L entre si, y son recorridas por una corriente I. Se pide:

- Una expresión para B en el punto medio entre las dos espiras en función de los datos.
- Lo mismo que en (a), si las espiras son circulares y comparar los resultados con (a) para $n \rightarrow \infty$



Solución:

$$d\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I \mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_T}{4\pi r^2} dl$$

$$dB_1 = \frac{\mu_0 I \sin \mathbf{a} dx}{4\pi r^2} \quad \text{y como } \sin \mathbf{a} = \frac{aP}{r}$$

$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{aP}{r^3} dx = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{aP}{\left[\left(\frac{cb}{2} - x \right)^2 + aP^2 \right]^{3/2}}$$

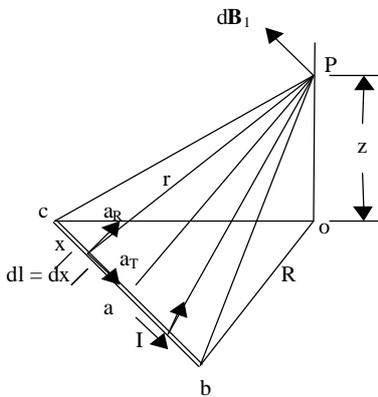
$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{cb/2} \frac{aP dx}{\left[\left(x - \frac{cb}{2} \right)^2 + aP^2 \right]^{3/2}}$$

$$|\mathbf{B}_1| = \frac{\mu_0 I}{4p} \frac{\overline{cb}}{\overline{aP} \left(\overline{aP}^2 + \frac{\overline{cb}^2}{4} \right)^{1/2}}$$

Pero como: $\overline{cb} = 2R \sin\left(\frac{p}{N}\right)$

$$\overline{aP} = R^2 \sin^2\left(\frac{p}{N}\right) + z^2$$

∴



$$\mathbf{B}_{ax} = \frac{nNB_1 \cos\left(\frac{p}{N}\right)}{\left[\left(R^2 \cos^2\left(\frac{p}{N}\right) + z^2 \right) \right]^{1/2}} \mathbf{a}_z$$

Luego la expresión total considerando las dos espiras poligonales será:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I R^2 n N \sin\left(\frac{p}{N}\right)}{4p} \left\{ \frac{1}{\left[R^2 \cos^2\left(\frac{p}{N}\right) + z^2 \right] (R^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{1}{\left[R^2 \cos^2\left(\frac{p}{N}\right) + (2L-z)^2 \right] \left[R^2 + (2L-z)^2 \right]^{1/2}} \right\} \mathbf{a}_z$$

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I}{4p} \frac{2R \sin\left(\frac{p}{N}\right)}{\left[R^2 \cos^2\left(\frac{p}{N}\right) + z^2 \right]^{1/2}} \dots$$

$$\dots \frac{1}{\left[R^2 \sin^2\left(\frac{p}{N}\right) + R^2 \cos^2\left(\frac{p}{N}\right) + z^2 \right]^{1/2}}$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I R \sin(p/N)}{2p \left[R^2 \cos^2\left(\frac{p}{N}\right) + z^2 \right]^{1/2} (R^2 + z^2)^{1/2}}$$

$B_{axial} = \sum B_1 \sin\beta$
 como hay N elementos que producen cada uno un campo B_1 con N vueltas, se tendrá:

